

## PROBLEMAS DE MATRICES Y DETERMINANTES.

1. La multiplicación de matrices cuadradas, ¿tiene la propiedad conmutativa? ¿Y la de matrices rectangulares? Razona y precisa las respuestas con ejemplos sencillos.
2. ¿Cómo deben ser las matrices rectangulares M y N para que puedan efectuarse las multiplicaciones MN y NM? Razónalo.
3. ¿Existe una matriz B tal que el producto AB sea una matriz de tres filas, siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ ?

4. Calcular  $A^2 - 3A^t - I$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

5. Hallar todas las matrices A que satisfacen a la ecuación:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

6. Dada la matriz  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  hallar  $X^2$  y  $X^3$ .

7. Se sabe que  $\det(A) = 5$ , y que A es una matriz de orden 2. ¿Cuánto vale  $\det(3A)$ ? Razona la respuesta.

8. Calcular los siguientes determinantes de orden 3:  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}, E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix}, F = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

9. Si el valor del determinante  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$ , calcular el valor de  $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$ .

10. Si  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$ , calcular sin desarrollar los siguientes determinantes: a)  $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$       c)  $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

11. Calcular los valores del parámetro t para los que el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$  es 2.

12. Calcular el rango de las siguientes matrices según los distintos valores del parámetro t

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

13. Hallar la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

14. Averiguar para que valores del parámetro  $t$ , la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$  no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de  $A$  para  $t = 2$  si es posible.

15. Calcular, utilizando determinantes, y para los valores del parámetro  $a$  que lo haga posible, la matriz inversa de  $M = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

16. Comprobar que existe la inversa de la siguiente matriz cualquiera que sea el valor de  $a$ , y calcularla:  $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$

17. Resolver la ecuación matricial  $A^t \cdot X = B + C$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

18. Determinar las matrices  $X$  e  $Y$  que verifican: 
$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases}$$

19. Hallar la matriz  $X$  que satisface la ecuación:  $A \cdot X \cdot B + C = D$ , siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

20. Estudiar el rango de las siguientes matrices para los diferentes valores de  $t$ :

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \\ 4 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

21. En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:

- Lote  $A$ : 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.
- Lote  $B$ : 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.
- Lote  $C$ : 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.

Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.

- a) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.
- b) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes  $A$ ,  $B$  y  $C$ .